

Vzťah časovej roviny s frekvenčnou, Eulerové vzorce

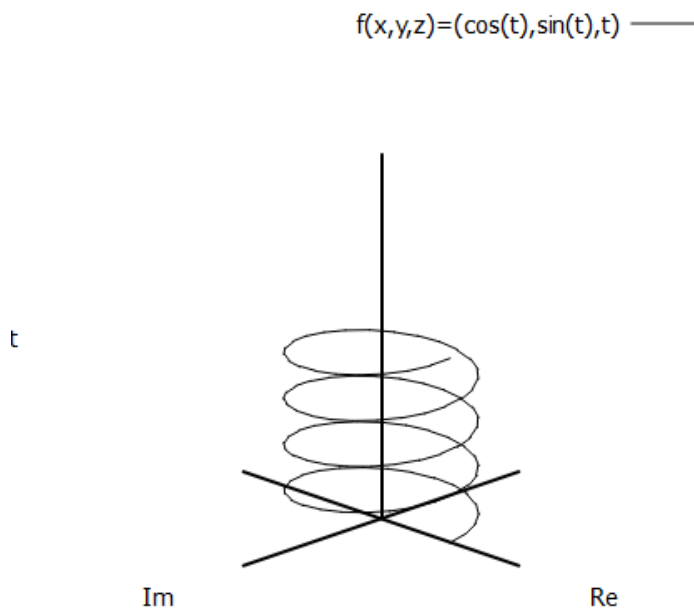
Vzťah medzi frekvenčnou rovinou a rovinou časovou umožňuje dva rôzne pohľady na tú istú funkciu, avšak jeden pohľad je časovo závislý a druhý je závislý od frekvencie respektíve od otáčok. Vzťah medzi frekvenčnou a časovou rovinou sa v matematike využíva napríklad, pri riešení diferenciálnych rovníc, kde sa transformuje funkcia z roviny s osami t , $f(t)$ do komplexnej roviny.

Skrutkovnica

Pre názorné zobrazenie vzťahu komplexnej roviny s rovinou časovou použijeme krivku známu ako skrutkovnica. Skrutkovnica je priestorová krivka a je to jedna zo základných kriviek, je definovaná vzťahom:

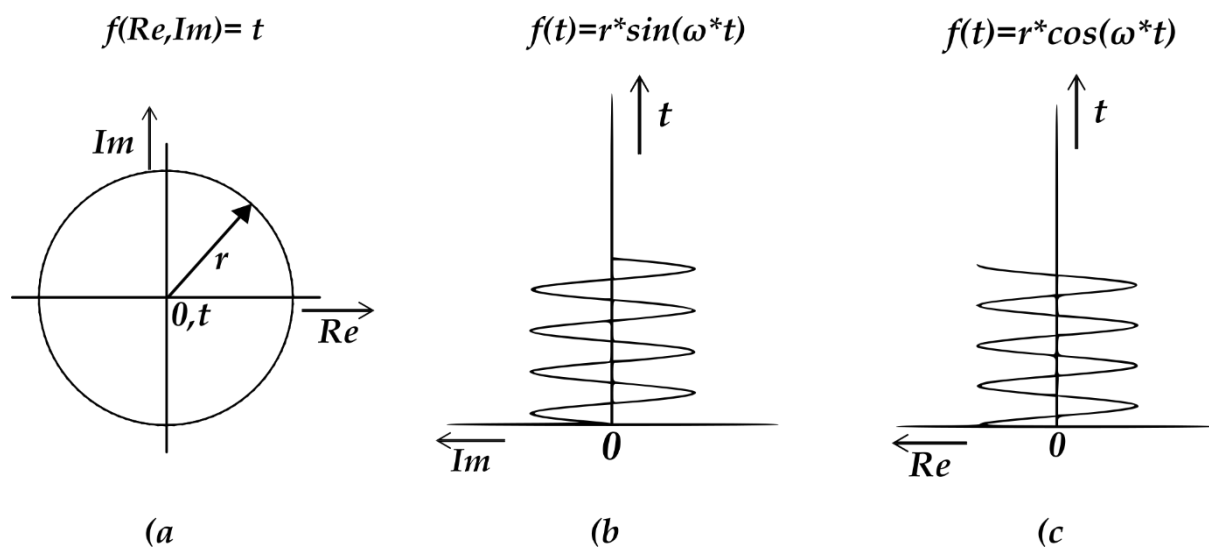
$$\overrightarrow{f(x, y, t)} = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t), t) \quad (1)$$

Kde r vyjadruje polomer závitů. Jej grafická interpretácia je nasledovná:



Obrázok 1 Trojrozmerná krivka skrutkovnica

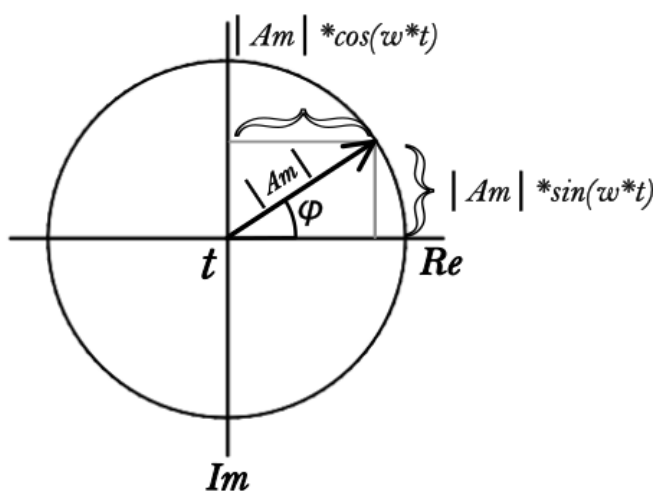
Zmenou uhla pod ktorým sa na krivku pozeráme môžeme získať tri rôzne grafy tej istej krivky.



Obrázok 2 Pohľad na skrutkovnicu z rôznych osí.

Pohľad z osi časovej (obrázok a) funkciu vyobrazuje v komplexnej rovine s reálnou a imaginárnou zložkou. Pohľadom z osi reálnej získavame priebeh na obrázku (b). Takýto priebeh je opísaný funkciou sínus. Pri pohľade z osi imaginárnej získavame priebeh na obrázku (c), ktorý je opísaný funkciou kosínus. Všetky priebehy opisujú správanie priestorovej krivky avšak iba v dvojrozmernom priestore.

Goniometrické vzorce



Obrázok 3 Pohľad na skrutkovnicu v komplexnej rovine

Odvozenia goniometrických vzorcov budú vychádzať z obr. 3, ktorý predstavuje pohľad na komplexnú rovinu z časovej osy. Výraz $|Am|$ predstavuje hodnotu polomeru kružnice (amplitúdu). Z obrázku je zrejmé, že hodnoty na reálnej osy sú vyjadrené pomocou funkcie kosínus a hodnoty na imaginárnej osy, pomocou funkcie sínus. Grécke písmeno φ predstavuje uhol medzi reálnou a imaginárnou zložkou. S použitím Pytagorovej vety môžeme hodnotu amplitúdy určiť ako:

$$\begin{aligned} |Am| &= \sqrt{(|Am| \cdot \sin(\omega \cdot t))^2 + (|Am| \cdot \cos(\omega \cdot t))^2} \\ &= |Am| \cdot \sqrt{\sin^2(\omega \cdot t) + \cos^2(\omega \cdot t)} \end{aligned} \quad (2)$$

Vzťah 2) môže ale byť správny iba ak sa výraz s odmocninou rovná 1, teda dostávame nasledovnú rovnicu:

$$1 = \sqrt{\sin^2(\omega \cdot t) + \cos^2(\omega \cdot t)} \quad (3)$$

Z ktorej po umocnení oboch strán na druhú dostávame prvý goniometrický vzorec:

$$1 = \sin^2(\omega \cdot t) + \cos^2(\omega \cdot t) \quad (4)$$

Pre odvozenie súčtových vzorcov a potom Eulerovej identity budeme potrebovať rozviesť funkcie sínus, kosínus a exponenciálnu funkciu e^{xi} do Taylorovho radu. Najprv uvedieme všeobecný predpis pre rozvoj funkcie do Taylorovho radu:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Kde a predstavujú bod, v ktorom chceme danú funkciu rozložiť do Taylorovho radu. Príslušné rozklady funkcií v bode 0 vyzerajú nasledovne:

$$T(\sin x, 0, x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}(-1)^n \quad (5)$$

$$T(\cos x, 0, x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \quad (6)$$

$$T(e^{ix}, 0, x) = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots + \frac{(xi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xi)^n}{n!} \quad (7)$$

Teraz môžeme pristúpiť k odvozeniu súčtových vzorcov:

$$\begin{aligned}
\sin(x_1 + x_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x_1 + x_2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[\sum_{\lambda=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{\lambda} x_1^{\lambda} x_2^{2n+1-\lambda} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\sum_{\lambda=0}^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)! \lambda! (2n+1-\lambda)!} x_1^{\lambda} x_2^{2n+1-\lambda} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\sum_{\lambda=0}^{2n+1} \frac{x_1^{\lambda} x_2^{2n+1-\lambda}}{\lambda! (2n+1-\lambda)!} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\sum_{\lambda=0}^{2n+1} \frac{x_1^{2\lambda} x_2^{2n+1-2\lambda}}{2\lambda! (2n+1-2\lambda)!} + \sum_{\lambda=0}^{2n+1} \frac{x_1^{2\lambda+1} x_2^{2n+1-2\lambda-1}}{(2\lambda+1)! (2n+1-1-2\lambda)!} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\sum_{\lambda=0}^{2n+1} \frac{x_1^{2\lambda} x_2^{2n+1-2\lambda}}{2\lambda! (2n+1-2\lambda)!} + \sum_{\lambda=0}^{2n+1} \frac{x_1^{2\lambda+1} x_2^{2n+1-2\lambda-1}}{(2\lambda+1)! (2n+1-1-2\lambda)!} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^n (-1)^{\lambda} \frac{x_1^{2\lambda} x_2^{2(n-\lambda)+1}}{2\lambda! [2(n-\lambda)+1]!} (-1)^{n-\lambda} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^n (-1)^{\lambda} \frac{x_1^{2\lambda+1} x_2^{2(n-\lambda)}}{(2\lambda+1)! [2(n-\lambda)]!} (-1)^{n-\lambda} = \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x_1^{2n}}{2n!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x_2^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] + \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x_1^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x_2^{2n}}{(2n)!} \right] \\
&= \cos x_1 \sin x_2 + \cos x_2 \sin x_1
\end{aligned}$$

Pri odvodení použitý zápis tvaru:

$$\binom{n}{k}$$

sa dá rozpisovať ako,

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Vo výsledku dostávame teda vzťah:

$$\sin(x_1 + x_2) = \cos x_1 \sin x_2 + \cos x_2 \sin x_1 \quad (8)$$

Eulerová identita

Ďalej si vyjadríme komplexné číslo v goniometrickom tvare ako:

$$\begin{aligned} \cos x + i \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} (-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(2n-1)}}{(2n-1)!} (-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (i^{2n}) \frac{x^{2n}}{2n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(2n-1)}}{(2n-1)!} (i^{2n-1}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{2n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xi)^{(2n-1)}}{(2n-1)!} = \frac{1}{1!} + \frac{xi}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \dots + \frac{(xi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xi)^n}{n!} = e^{xi} \end{aligned}$$

Dostávame teda nasledovný vzťah:

$$\cos x + i \sin x = e^{xi} \quad (9)$$

$$\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi) = e^{(\omega t + \varphi)i} \quad (10)$$

Vzťah (10) lepšie zobrazuje frekvenčnú závislosť výrazov na oboch stranách rovnice. Po dosadení, $x = \pi$ a úpravách rovnice (9) dostávame vzťah, ktorý dáva do súvislosti päť často využívaných matematických konštánt (1,0, π , e , i). Vzťah (11) sa nazýva aj Eulerová identita a je často považovaný za jeden z najkrajších vzťahov v matematike.

$$\cos \pi + i \sin \pi = e^{\pi i} = 0 - 1$$

$$e^{\pi i} + 1 = 0 \quad (11)$$

Zoznam použitej literatúry:

[1] I. Kľuvánek, L. Mišík, M. Švec: *Matematika 2*