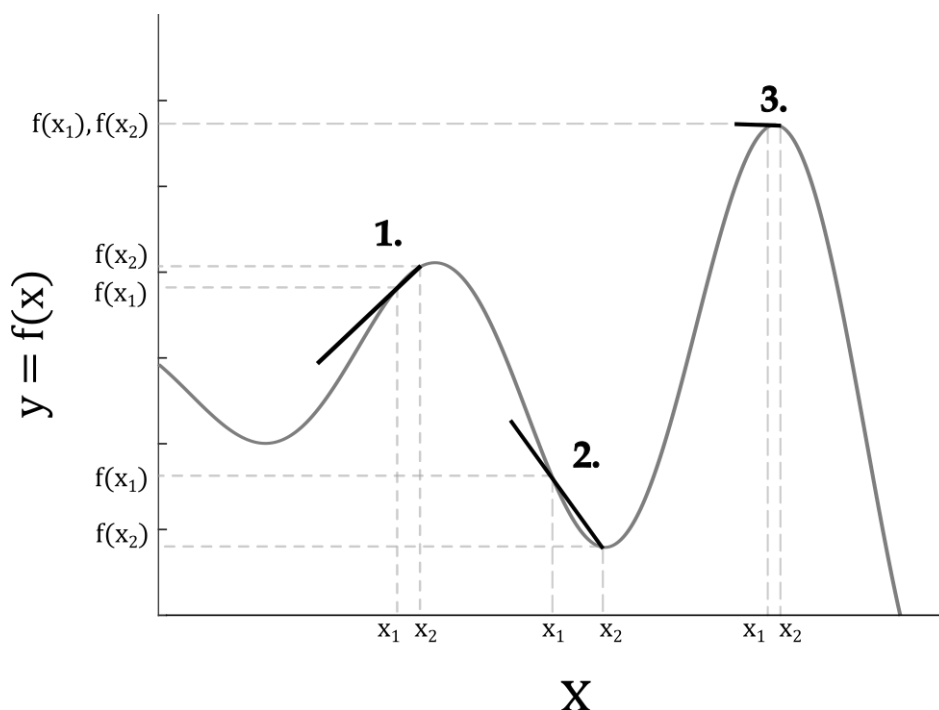


# Derivácia, diferenciál funkcie jednej premennej

Derivácia funkcie sa často označuje aj ako smernica dotyčnice a predstavuje nekonečne malý prírastok y-ovej súradnice, v pomere k nekonečne malému prírastku x-ovej súradnice. Jeden zo základných stavebných kameňov, ktorý umožnil hovoriť infinitezimálnom (nekonečne malom) počte a teda aj o deriváciách, integráloch a diferenciáloch je jednoznačne limita funkcia. Pomocou limity vieme určiť k akému číslu sa daná funkcia približuje aj v bodoch jej nespojitosti. Derivácia funkcie v súradnej sústave  $x, y$  je definovaná nasledovným spôsobom:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{x_0 \rightarrow x_1} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (1)$$

Pre vysvetlenie významu vzťahu (1) si pomôžeme obrázkom.



Obrázok 1 Grafické zobrazenie derivácie.

Na obrázku sú naznačené 3 rôzne situácie. Prvá situácia označená ako 1 má funkčnú hodnotu v bode  $x_2$  väčšiu ako v bode  $x_1$  a takisto aj hodnota  $x_2$  bude väčšia ako  $x_1$ . Ako sa  $x_1$  bude limitne približovať k  $x_2$ , bude derivácia naberať kladné hodnoty až v bode  $x_2$  bude derivácia funkcie rovná kladnému číslu vyjadrujúceho sklon dotyčnice v bode  $x_2$ . Pre situáciu 2 bude rozdiel v tom, že funkčná hodnota v bode  $x_2$  bude menšia ako v bode  $x_1$ , toto podľa vzťahu (1), zapríčiní, že derivácia v bode  $x_2$  bude mať zápornú hodnotu. Záporná hodnota derivácie teda

znamená, že funkcia je v danom bode klesajúca a kladná hodnota derivácie znamená, že funkcia je v danom bode rastúca. Situácia 3 zobrazuje stav, kedy sa funkčné hodnoty rovnajú. V takom prípade je čitateľ vo vzťahu (1, rovný 0. Pre body, v ktorých je derivácia funkcie rovná 0 platí, že v nich funkcia nerastie a ani neklesá. Samotná číselná hodnota derivácie hovorí o tom, ako veľmi funkcia v danom bode rastie v prípade kladného znamienka a klesá v prípade záporného znamienka.

## Diferenciál

Diferenciál sa v prírodných vedách používa na určenie približnej hodnoty v určitom bode. Rovnicu (1 môžeme upraviť na nasledujúci tvar:

$$f(x_1) - f(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} * (x_1 - x_0) + \delta(x_1) * (x_1 - x_0) \quad (2)$$

Člen  $\frac{dy}{dx} * (x_1 - x_0)$  predstavuje diferenciál. Člen  $\delta(x_1)$  zohľadňuje chybu, ktorá vznikne zanedbaním limity a jeho hodnota je:

$$\delta(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{df(x_0)}{dx} \quad (3)$$

Zo vzťahu (3 vidieť, že ak by bola funkcia  $f(x)$  lineárna tj. opísaná priamkou, bol by výraz  $\delta(x_1) = 0$  a diferencia funkčných hodnôt by bola vyjadrená priamo diferenciálom:

$$f(x_1) - f(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} * (x_1 - x_0) \quad (4)$$

Ďalej, ak nás zaujíma približné určenie funkčnej hodnoty v neznámom bode môžeme ju zo vzťahu (4 vyjadriť ako:

$$f(x_1) = \frac{df(x_0)}{dx} * (x_1 - x_0) + f(x_0) \quad (5)$$

Za zmienku stojí, že odvodený výraz (5 je pre  $x_0 = 0$  rovnicou priamky ( $y = k * x + f(x_0)$ ) a taktiež predstavuje prvé dva členy z rozvoja do Taylorovho radu, ktorý je vyjadrený nasledovne:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x_1 - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} (x_1 - x_0)^n$$

## Príklad

Pomocou diferenciálu odhadnite hodnotu funkcie v bode  $x_1 = 1.1$ , ak  $x_0 = 1$ . Funkcia je vyjadrená nasledovne:

$$f(x) = 5 * e^{-\frac{1}{x}} * \sin\left(\frac{5}{6} * \pi\right) + 5 * \sin\left(\frac{5}{6} * \pi * x\right) * x^3$$

Určte chybu výpočtu  $\delta(x_1)$ .

Podľa vzťahu (5) budeme potrebovať určiť deriváciu funkcie v bode  $x_0$ .

$$\frac{df(x)}{dx} = 5 * e^{-\frac{1}{x}} * \left(-\frac{1}{x}\right) * \sin\left(\frac{5}{6} * \pi\right) + 5 * \sin\left(\frac{5}{6} * \pi * x\right) * 3 * x^2 + 5 * \cos\left(\frac{5}{6} * \pi * x\right) * \frac{5}{6} * \pi * x^3$$

Pre  $x_0 = 1$ , po úprave dostaneme:

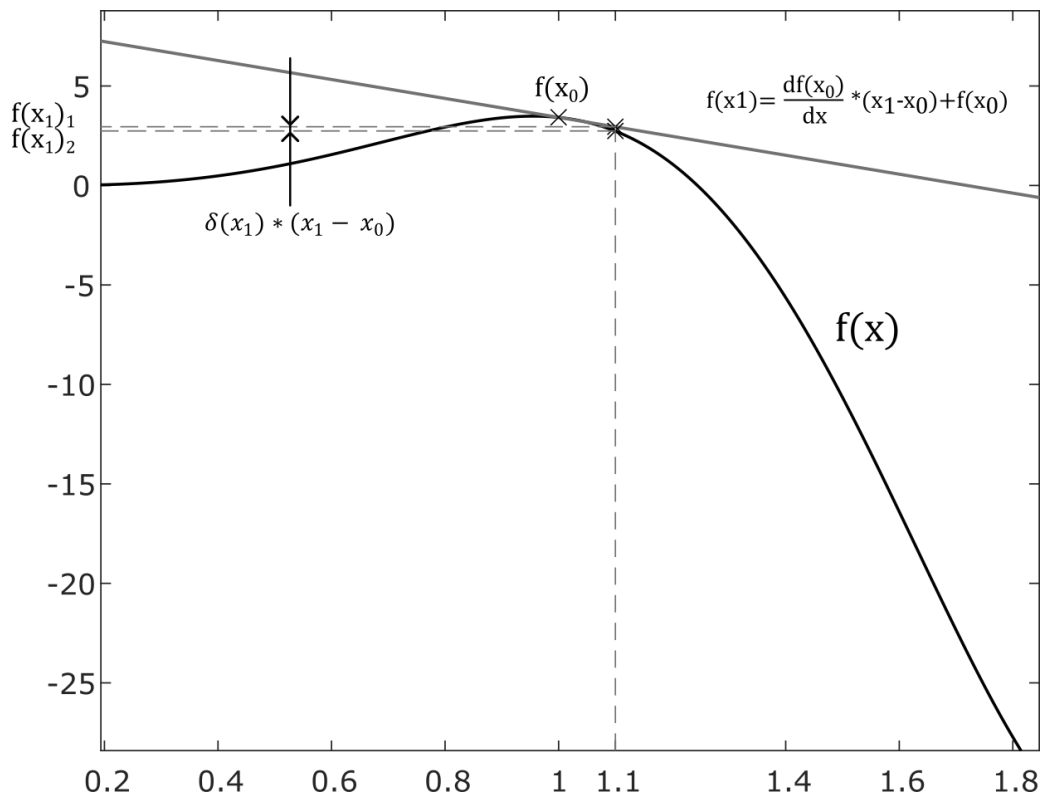
$$\frac{df(x_0)}{dx} = 5 * \sin\left(\frac{5}{6} * \pi\right) * \left[-\frac{1}{e} + 3 + \cot\left(\frac{5}{6} * \pi\right) * \frac{5}{6} * \pi\right] = \frac{5}{2} * \left[-\frac{1}{e} + 3 - \sqrt{3} * \frac{5}{6} * \pi\right]$$

Ďalej potrebujeme určiť funkčnú hodnotu funkcie v bode  $x_0$ ,

$$f(x_0) = 5 * \frac{1}{e} * \sin\left(\frac{5}{6} * \pi\right) + 5 * \sin\left(\frac{5}{6} * \pi\right) = 5 * \sin\left(\frac{5}{6} * \pi\right) * \left(1 + \frac{1}{e}\right) = \frac{5}{2} * \left(1 + \frac{1}{e}\right)$$

Po dosadení do (5) dostaneme:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{df(x_0)}{dx} * (x_1 - x_0) + f(x_0) = \\ &= \frac{5}{2} * \left[-\frac{1}{e} + 3 - \sqrt{3} * \frac{5}{6} * \pi\right] * (x_1 - 1) + \frac{5}{2} * \left(1 + \frac{1}{e}\right) = \\ &= \frac{5}{2} * \left[-\frac{1}{e} + 3 - \sqrt{3} * \frac{5}{6} * \pi\right] * (1.1 - 1) + \frac{5}{2} * \left(1 + \frac{1}{e}\right) = 2.947 \end{aligned}$$



Obrázok 2 Znáozornenie situácie z príkladu. Hodnota  $f(x_1)_1$  predstavuje hodnotu určenú pomocou diferenciálu. Hodnota  $f(x_1)_2$  predstavuje skutočnú hodnotu funkcie v danom bode.

Na určenie  $\delta(x_1)$  potrebujeme poznať skutočnú hodnotu funkcie  $f(x_1)$  v bode  $x_1$ . Túto získame odčítaním z grafu vytvoreného v prostredí matlab:

$$f(x_1) = 2.739807034155131$$

$$\begin{aligned} \delta(x_1) &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{df(x_0)}{dx} = \\ &= \frac{2.739807034155131 - \frac{5}{2} * \left(1 + \frac{1}{e}\right)}{1.1 - 1} - \frac{5}{2} * \left[-\frac{1}{e} + 3 - \sqrt{3} * \frac{5}{6} * \pi\right] = -2.04297 \end{aligned}$$

Pre kontrolu výpočtu použijeme vzťah (2, pričom, opäť z grafu odčítame skutočnú hodnotu  $f(x_1)$  a porovnáme ju z vypočítanou:

$$f(x_1) = \frac{df(x_0)}{dx} * (x_1 - x_0) + \delta(x_1) * (x_1 - x_0) + f(x_0)$$

$$\begin{aligned} 2.739807034155131 &\approx \frac{5}{2} * \left[-\frac{1}{e} + 3 - \sqrt{3} * \frac{5}{6} * \pi\right] * (1.1 - 1) - 2.04 * (1.1 - 1) + \frac{5}{2} * \\ &\quad \left(1 + \frac{1}{e}\right) = 2.73907034 \end{aligned}$$

Z príkladu možno vidieť, že odhad funkčnej hodnoty nám vyšiel približne rovnaký, pre porovnanie uvádzame výsledné hodnoty nižšie:

$$f(x_1)_1 = 2.947$$

$$f(x_1)_2 = 2.739807034155131$$

Hodnota  $f(x_1)_1$  predstavuje približne hodnotu vypočítanú pomocou diferenciálu a hodnota  $f(x_1)_2$  predstavuje hodnotu skutočnú určenú numericky. Odchýlka odhadu od skutočnej hodnoty závisí od zmeny strmosti funkcie v počiatočnom bode a bode skúmanom a teda závisí od zmeny veľkosti derivácií v sledovanom a počiatočnom bode. Pre body, ktoré sú dostatočne blízko seba je takýto odhad funkcie dostatočný. Pomocou diferenciálu teda vieme získať predpis rovnice dotyčnice a následne pomocou neho danú krivku po častiach linearizovať.

### ***Zoznam použitej literatúry:***

[1] I. Kluvánek, L. Mišík, M. Švec: *Matematika 1*

[1] I. Kluvánek, L. Mišík, M. Švec: *Matematika 2*